C.N.R.S. – Université Paris Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu
Algèbres d'opérateurs et représentations

Université Paris Diderot (Paris 7)
UFR de Mathématiques
CASE POSTALE **7012**
175, rue du Chevaleret
F-75013 PARIS

Georges Skandalis
e-mail : skandal@math.jussieu.fr
georges.skandalis@univ-paris-diderot.fr
tél. +33 1 57 27 91 74
Fax : +33 1 57 27 91 69

Rapport sur la thèse de Laurent GUILLAUME

Dans une longue série d'articles et un livre, R. Melrose (et coauteurs) décrit divers calculs pseudodifférentiels associés à des situations géométriques variées : variétés à bord, variétés à coins...
Depuis les travaux de Connes, puis ceux de Monthubert-Pierrot, Monthubert, Nistor-Weinstein-Xu *etc.* , on sait associer à tout groupoïde de Lie un calcul pseudodifférentiel. Le défi est alors lancé d'expliquer chaque calcul pseudodifférentiel « naturel » en termes d'un groupoïde de Lie. C'est un tel défi que relève ici Laurent Guillaume.

En 1998, Mazzeo et Melrose ([MM98]) ont construit un calcul pseudodifférentiel appelé ϕ-calcul associé à une variété à bord fibré. Les opérateurs construits dans [MM98] ont un comportement particulier lorsqu'on s'approche du bord en ce qu'ils ne différencient à la limite que le long des fibres de la fibration. Les opérateurs d'ordre négatif ou nul opèrent naturellement sur l'espace L^2 de la variété. L'adhérence de l'algèbre qu'ils forment est une C^*-algèbre $\mathcal{A}_X$. Comme dans le cas sans bord, l'application qui à un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 associe son symbole principal est un homomorphisme de C^*-algèbres $\sigma : \mathcal{A}_X \to C(S^*X)$, où $C(S^*X)$ désigne la C^*-algèbre commutative des fonctions continues sur l'espace total S^*X d'un fibré en sphères au dessus de X. Par contre, en présence du bord fibré, ces opérateurs ont aussi un autre type de symbole « non commutatif », qui est une famille indexée par l'espace total du fibré (co)-normal d'opérateurs pseudodifférentiels sur la fibre. Un opérateur n'est compact que si tous ces symboles sont nuls (*cf.* Melrose-Rouchon).

A cette vision analytique, Laurent Guillaume propose donc une explication géométrique dans la lignée des travaux de Bertrand Monthubert : il construit un groupoïde de Lie naturel associé à la variété à bord fibré et démontre que le calcul pseudodifférentiel associé n'est autre que le ϕ calcul.
Dans le cas où la fibration du bord est triviale, le groupoïde associé est celui de Monthubert (et, dans ce cas, le ϕ calcul de Mazzeo et Melrose est le b calcul de Melrose). De même que Monthubert dans le cas des variétés à bord (sans fibration), Guillaume se ramène au cas d'une variété M et d'une sous variété fermée V de codimension 1 fibrée au dessus d'une base B. Guillaume traite en fait le cas plus général où la sous variété V de codimension 1

est feuilletée. Dans ce cas, son groupoïde est obtenu à l'aide de l'idée d'éclatement, et est plus précisément basée sur la construction de la « déformation au cône normal » associée à l'immersion du groupoïde d'holonomie du feuilletage de V dans $V \times V$. Il traite aussi une généralisation au cas des variétés à coins fibrés (avec des conditions naturelles de transversalité des fibration pour les composantes de bord) : comme Monthubert, il se ramène au cas des *équarrissages* qui ici sont en plus ici munis de fibrations. Le groupoïde est alors le produit fibré des groupoïdes associés à chaque sous variété de codimension 1 définissant l'équarrissage.

Dans la fin de la thèse, Guillaume donne une seconde présentation de son groupoïde comme groupoïde d'holonomie du feuilletage singulier associé (au sens de C. Debord ou de [AS11]) associé à l'algébroïde des champs de vecteurs sur X qui deviennent tangents à la fibre au bord.

Une fois le groupoïde de Lie ainsi construit, L. Guillaume s'attache à démontrer que le calcul pseudodifférentiel associé est bien celui de [MM98]. Comme dans le cas de Monthubert pour les variétés à coins, cela se fait en deux étapes : dans un premier temps on identifie les calculs pseudodifférentiels à support compact, puis on utilise des fonctions longueur et des fonctions à décroissance rapide associées pour retrouver le calcul pseudodifférentiel étendu. Il est à noter que cette construction s'étend aussi dans un cas plus général de feuilletages (sous des hypothèses de croissance des feuilles).
La vision géométrique permet de donner une explication concrète aux diverses composantes du symbole : la partie commutative provient du symbole pour un opérateur pseudodifférentiel sur un groupoïde longitudinalement lisse ; le symbole non commutatif est le morphisme naturel d'algèbres de groupoïdes associé à la restriction à une partie fermée saturée des objets.

Dans le cas de bord fibré, l'algèbre de Schwarz construite est stable par calcul fonctionnel holomorphe dans la C^*-algèbre du groupoïde. Laurent Guillaume construit des cocycles cycliques naturels sur cette algèbre.

On trouve dans plusieurs chapitres de la thèse de nombreux rappels sur la théorie de l'indice et son approche par les groupoïdes, la cohomologie cyclique, la cohomologie cyclique relative, les feuilletages singuliers, les produits croisés d'algèbres de Fréchet par des actions de $\mathbb{R}$... De ce fait, la thèse a nécessité un énorme travail de rédaction. Un inconvénient de cette présentation est que l'important travail personnel de Guillaume n'est peut-être pas toujours assez clairement identifié.

La thèse de Laurent Guillaume représente un travail très important avec des idées nouvelles sur le calcul pseudodifférentiel, son approche par les groupoïdes de Lie et divers calculs à l'aide de la cohomologie cyclique.

En conséquence, je donne un avis favorable à la soutenance de sa thèse.

Georges Skandalis
Professeur de Mathématiques
Université Paris Diderot
Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586)